

ĐẠI SỐ

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

Cú pháp: **> solve(equ, var);**

Trong đó: - equ : là phương trình hoặc bất phương trình
- var: là biến số (ẩn số).

Các ví dụ:

Ví dụ 1: Giải phương trình $x^2 - 3x - 2 = 0$.

Ta nhập vào Maple như sau:

> solve(x^2-3*x-2=0,x);

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Cụ thể hơn, nếu ta khai báo {x}_dùng cặp ngoặc { ... } ở biến, thì kết quả sẽ như sau:

> solve(x^2-3*x-2=0,{x});

$$\{x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\}, \{x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\}$$

Chú ý nếu phương trình có dạng $f(x) = 0$, thì ta có thể dùng cú pháp:

> solve(f(x), x); hoặc **>**

solve(f(x), {x});

Chẳng hạn với phương trình ở trên ta có thể nhập như sau:

> solve(x^2-3*x-2,{x});

$$\{x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\}, \{x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình $x^3 - 3x + 2 = x - 1$.

> eq:=x^3-3*x+2=x-1;

$$eq := x^3 - 3x + 2 = x - 1$$

> solve(eq,{x});

$$\{x = 1\}, \{x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\}, \{x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$.

> f:=x^3-4*x^2+4*x-3; {# Khai báo phương trình }

$$f := x^3 - 4x^2 + 4x - 3$$

> solve(f,{x}); {# Giải phương trình }

$$\{x = 3\}, \{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \{x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}$$

Ta nhận thấy, trường hợp phương trình có nghiệm phức, Maple sẽ cho kết quả rất cụ thể.

Ví dụ 4: Giải phương trình sau theo ẩn số x : $3x - (y+1)^2 = 2$

```
> restart; eq:=3*x-(y+1)^2=2;
```

$$eq := 3x - (y + 1)^2 = 2$$

```
> solve(eq, {x});
```

$$\left\{ x = \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}y + 1 \right\}$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $x^4 - x + 1 = 0$

```
> f:=x^4-2*x^3+2; solve(f, {x});
```

$$f := x^4 - 2x^3 + 2$$

```
{ x = RootOf(_Z^4 - 2 _Z^3 + 2, index = 1) }, { x = RootOf(_Z^4 - 2 _Z^3 + 2, index = 2) },
{ x = RootOf(_Z^4 - 2 _Z^3 + 2, index = 3) },
{ x = RootOf(_Z^4 - 2 _Z^3 + 2, index = 4) }
```

Trường hợp này, Maple dùng RootOf(expression, index = i) để thông báo kết quả.

Để thấy các nghiệm cụ thể ta có thể làm theo một trong các cách sau:

Cách 1:

```
> evalf(%);
```

$$\{ x = 1.529085514 + 0.2570658641 I \}, \{ x = -0.5290855136 + 0.7429341359 I \},$$

$$\{ x = -0.5290855136 - 0.7429341359 I \}, \{ x = 1.529085514 - 0.2570658641 I \}$$

Theo cách này, thu được các nghiệm cụ thể ở dạng thập phân.

Cách 2:

```
> restart; f:=x^4-2*x^3+2; solve(f, {x}):
```

$$allvalues(\{\% \});$$

$$f := x^4 - 2x^3 + 2$$

$$\left\{ \left\{ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I - \frac{\sqrt{4-2I}}{2} \right\}, \left\{ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I + \frac{\sqrt{4-2I}}{2} \right\}, \left\{ x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I + \frac{\sqrt{4+2I}}{2} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I - \frac{\sqrt{4+2I}}{2} \right\} \right\}$$

Theo cách này, ta đã sử dụng lệnh `>allvalues({%});` để lấy các nghiệm tường minh và chính xác hơn.

♥♥♥ Một cách khác để tìm tập nghiệm của phương trình :

Giả sử ta cần giải phương trình có dạng $\exp = 0$.

Cặp lệnh: `> eq:= RootOf(exp, var); allvalues(eq);`

Ví dụ 6: Giải phương trình $x^3 - 2x + 1 = 0$.

```
> eq1:=RootOf(x^3-2*x+1,x);
      eq1 := RootOf(_Z^3 - 2 _Z + 1)

> allvalues({eq1});
      { 1 }, { -1/2 + sqrt(5)/2 }, { -1/2 - sqrt(5)/2 }
```

* Nếu muốn tìm nghiệm thứ i (là số nguyên) của phương trình $\exp = 0$ (phương trình một ẩn), ta dùng cặp lệnh sau:

```
> eq:= RootOf(exp, index = i); allvalues(eq);
```

Ví dụ 7: Tìm nghiệm thứ 2 của phương trình $x^3 - 6x + 4 = 0$

```
> eq2:=RootOf(x^3-6*x+4, index = 2);
      eq2 := RootOf(_Z^3 - 6 _Z + 4, index = 2)

> allvalues({eq2});
      { 2 }
```

Ví dụ 8: Giải phương trình lượng giác $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

```
> eq1:=sqrt(3)*sin(x)-cos(x)=1;
      eq1 := sqrt(3) sin(x) - cos(x) = 1

> solve(eq1,{x});
      { x = pi }, { x = pi/3 }
```

Để tìm tập nghiệm đầy đủ của phương trình trên ta thực hiện đoạn lệnh sau:

```
> _EnvAllSolutions := true:
> solve(eq1,{x});
      { x = pi + 2 pi _Z1~ }, { x = pi/3 + 2 pi _Z2~ }
```

Ở đây, $Z1\sim$, $Z2\sim$ là các số nguyên.

Ví dụ 9: Giải phương trình lượng giác $\cos x = 0$.

```
> _EnvAllSolutions := true: solve(cos(x)=0,x);
      1/2 pi + pi _Z5~
```

Bây giờ ta có thể thay giá trị của $Z5\sim$ giá trị nguyên để tìm nghiệm cụ thể của phương trình trên bằng cách dùng các lệnh sau:

{Để tính giá trị của $Z5\sim$ ta dùng lệnh: >

```
op(indets(solve(cos(x)=0,x))); }
```

> **_EnvAllSolutions := true: r:=solve(cos(x)=0,x);**

$$r := \frac{1}{2}\pi + \pi_Z5\sim$$

> **subs(op(indets(r))=n,r);**

$$\frac{1}{2}\pi + \pi n$$

Ở trên ta đã thay $Z5\sim$ bởi n .

Bây giờ thay $Z5\sim = 7$, ta được nghiệm là:

> **_EnvAllSolutions := true: r:=solve(cos(x)=0,x);**

$$r := \frac{1}{2}\pi + \pi_Z5\sim$$

> **subs(op(indets(r))=7,r);**

$$\frac{15\pi}{2}$$

♣ **Tìm nghiệm theo tham số đối với phương trình có hơn một ẩn số.**

Ví dụ 10: Giải phương trình hai ẩn $x^2 + y^2 = 4$.

> **restart;**

eq:=x^2 + y^2 = 9; solve(eq, {x(t), y(t)});

$$eq := x^2 + y^2 = 9$$

$$\left\{ x = \frac{3}{\sqrt{1+t^2}}, y = \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}} \right\}, \left\{ x = -\frac{3}{\sqrt{1+t^2}}, y = -\frac{3t}{\sqrt{1+t^2}} \right\}$$

Ví dụ 11: Giải phương trình hai ẩn $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

> **eq2:=x^2/9+y^2/4=1; solve(eq2, {x(u), y(u)});**

$$eq2 := \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\left\{ y = \frac{6u}{\sqrt{4+9u^2}}, x = \frac{6}{\sqrt{4+9u^2}} \right\}, \left\{ x = -\frac{6}{\sqrt{4+9u^2}}, y = -\frac{6u}{\sqrt{4+9u^2}} \right\}$$

♣ **Giải bất phương trình .**

Ví dụ 12: Giải bất phương trình $x^2 - 3x > 1$.

> **solve(x^2-3*x>1, {x});**

$$\left\{ x < \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}, \left\{ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} < x \right\}$$

Hoặc:

> **restart;solve(x^2-3*x>1, x);**

$$\text{RealRange}\left(-\infty, \text{Open}\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right), \text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right), \infty\right)$$

Nhận xét: nếu ta khai báo {x} trong câu lệnh thì kết quả rõ ràng hơn.

Ví dụ 13: Giải bất phương trình $x^3 + x^2 - 3x - 2 < 0$.

> **solve(x^3+x^2-3*x-2<0, {x});**
 $\{x < -2\}, \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x, x < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$

♣ Giải hệ (bất) phương trình .

Cú pháp: > **solve({sys_equ}, var);**

Trong đó: - sys_equ: là các phương trình của hệ, được đặt trong cặp ngoặc { }
 và cách nhau bởi dấu phẩy “,”.
 - var: là các biến của hệ nên đặt trong cặp ngoặc { }.

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$.

> **sys:={x+2*y=3, y+1/x=1};solve(sys, {x,y});**
 $\text{sys} := \{x + 2y = 3, y + \frac{1}{x} = 1\}$
 $\{y = 2, x = -1\}, \{y = \frac{1}{2}, x = 2\}$

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 - y = 0 \\ x + y^2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

> **sys2:={x^2-y^2-y, x+y^2, x<>0}; solu:=solve(sys2):**
 $\text{sys2} := \{x^2 - y^2 - y, x \neq 0, x + y^2\}$
 > **`Nghiệm thực của hệ`;evalf(solu);**
Nghiệm thực của hệ
 $\{y = 1.324717957, x = -1.754877666\}$

Giá trị chính xác của nghiệm này là:

{Nghiệm này lấy được bằng cách dùng lệnh > **allvalues(solu);** và lấy nghiệm đầu tiên trong phần kết quả thu được }.

$$\left\{ x = -\left(\frac{(108+12\sqrt{69})^{(1/3)}}{6} + \frac{2}{(108+12\sqrt{69})^{(1/3)}} \right), y = \frac{(108+12\sqrt{69})^{(1/3)}}{6} + \frac{2}{(108+12\sqrt{69})^{(1/3)}} \right\}$$

- opts: khai báo **numeric** là **true** hoặc **false**. Nếu **true** thì kết quả cho dưới dạng thập phân, nếu là **false** thì kết quả cho dưới dạng đầy đủ nguyên bản. Nếu ta không khai báo **opts** thì Maple sẽ tự mặc định khai báo là **numeric=false**.

Ví dụ 16: Tìm tập nghiệm của phương trình $2x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$

```
> eq := 2*x^3+5*x^2-5*x-6;
```

$$eq := 2x^3 + 5x^2 - 5x - 6$$

```
> with(Student[Calculus1]):
```

```
`Tap nghiệm của PT đã cho:`;
```

```
Roots(eq,x);
```

Tap nghiệm của PT đã cho:

$$\left[-3, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \right]$$

Nếu muốn kết quả hiển thị dưới dạng thập phân thì ta khai báo **opts** là **numeric=true** (Trong câu lệnh ta chỉ cần viết **numeric** thì Maple tự khai báo cho ta **numeric=true**). Ta được:

```
> with(Student[Calculus1]):
```

```
`Tap nghiệm của PT đã cho:`;
```

```
Roots(eq,numeric);
```

Tap nghiệm của PT đã cho:

$$[-3., -0.7807764064, 1.280776406]$$

Nếu muốn kết quả được làm tròn đến 5 chữ số ở hàng thập phân ta làm tiếp như sau:

```
> evalf(%,5);
```

$$[-3., -0.78078, 1.2808]$$

Ví dụ 17: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trong khoảng $[-10; 15]$.

```
> restart;
```

```
> with(Student[Calculus1]):eq1:=sin(x);
```

```
`Tap nghiệm của PT sinx=0 trên đoạn [-10;15]:`;
```

```
Roots(eq1,x=-10..15);
```

$$eq1 := \sin(x)$$

Tap nghiệm của PT sinx=0 trên đoạn [-10;15]:

$$[-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi]$$

Rõ ràng phương trình này có vô số nghiệm trên tập xác định của nó, nếu ta không giới hạn khoảng nghiệm, Maple sẽ thông báo và chỉ đưa ra một số nghiệm minh họa.

```
> restart;with(Student[Calculus1]):eq1:=sin(x);
`Tap nghiệm của PT sinx=0 :
`;Roots(eq1);
```

$$eq1 := \sin(x)$$

Tap nghiệm của PT $\sin x = 0$:

Warning, the expression has an infinity of roots, some examples of which are given

$$[-\pi, 0, \pi]$$

Maple đã thông báo, phương trình (ở trên là biểu thức `_expression`) có vô số nghiệm, và chỉ đưa ra một số nghiệm của phương trình. {Warning, the expression has an infinity of roots, some examples of which are given}.

•• Giải phương trình chứa căn thức.

Ví dụ 18: Giải phương trình $x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 3$

```
> eq:=x+sqrt(x)+x^(1/3)=3 ;`Nghiệm của
Pt: `;solve(eq,{x});
```

$$eq := x + \sqrt{x} + x^{(1/3)} = 3$$

Nghiệm của Pt:

$$\{x = 1\}$$

Ví dụ 19: Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 3$.

```
> eq1:=sqrt(x)+sqrt(x+1)=3;
`Nghiệm của Pt: `; solve(eq1, {x});
eq1 := sqrt(x) + sqrt(x+1) = 3
```

Nghiệm của Pt:

$$\{x = \frac{16}{9}\}$$

•• Giải phương trình nghiệm nguyên.

Cú pháp: `> isolve(eqns, vars);`

Ví dụ: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2x - 3y = 5$

```
> restart;eq2:=isolve(2*x-3*y=5);
eq2 := {x = 4 + 3 _Z1, y = 1 + 2 _Z1}
```

Ví dụ: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

```
> isolve(x^3-x^2-3*x+2);
{x = 2}
```


Ví dụ: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 = 25$

```
> isolve(x^2+y^2=25);
{ x = 3, y = -4 }, { y = 4, x = -3 }, { y = 4, x = 3 }, { x = -3, y = -4 }, { y = 0, x = 5 },
{ y = 0, x = -5 }, { x = 0, y = 5 }, { x = 0, y = -5 }, { y = 3, x = 4 }, { y = -3, x = 4 },
{ y = 3, x = -4 }, { y = -3, x = -4 }
```

Trường hợp phương trình không có nghiệm nguyên, thì Maple cho kết quả là *Null* (rỗng và không hiện trên màn hình). Ví dụ với phương trình $x^2 = 5$.

```
> isolve(x^2=5);
```

•• *Tìm nghiệm thực của một phương trình, bất (hệ) phương trình.*

Dùng lệnh **solve** trong gói lệnh **> with(RealDomain);**.

Ví dụ:

Tìm các nghiệm số thực của phương trình :

$$2x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 3x - 6 = 0.$$

+ Nhập phương trình vào Maple:

```
> f:=2*x^4-9*x^3+13*x^2-3*x-6=0;
f;
```

$$2x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 3x - 6 = 0$$

+ Tìm nghiệm số thực của phương trình:

```
> with(RealDomain);
```

```
> solve(f,{x});
```

$$\{x = 2\}, \{x = \frac{-1}{2}\}$$

Chú ý: Nếu không dùng gói lệnh **with(RealDomain)** thì có thể dùng dòng lệnh sau để tìm nghiệm thực của phương trình :

```
> use RealDomain in solve(f,{x}) end use;
```

$$\{x = 2\}, \{x = \frac{-1}{2}\}$$

Ví dụ:

Giải phương trình $x - \sqrt{m^2} = 0$.

+ Giải phương trình với lệnh **solve** bình thường:

```
> solve(x-sqrt(m^2)=0,{x});
```

$$\{x = \sqrt{m^2}\}$$

+ Giải phương trình trên với **RealDomain**:

```
> use RealDomain in solve(x-sqrt(m^2)=0,{x}) end use;
```

$$\{x = \text{csign}(m) m\}$$

+ Đơn giản kết quả trên với **RealDomain**:

```
> use RealDomain in simplify(%) end use;
```

$$\{x = |m|\}$$